Compitino di geometria e algebra lineare del 31 maggio 2022

Istruzioni: Avete 2 ore di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giiustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

Esercizio 1. [12 punti] Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ t & 1 & 1-t \end{pmatrix}$$

dipendente da un parametro reale $t \in \mathbb{R}$. Per quali valori $t \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$?

Esercizio 2. [12 punti] Determina la segnatura della matrice simmetrica

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Più in generale, sia S_{2n} la matrice simmetrica $2n \times 2n$ del tipo

$$S_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice S_{2n} ha valore zero su tutte le diagonali, tranne le diagonali che stanno sopra e sotto quella principale in cui invece ha valore uno.

Calcola al variare di n il determinante e la segnatura di S_{2n}.

Esercizio 3. [12 punti] Siano r la retta affine passante per i punti $P = (1, 1, 7)$ e $Q = (1, 1, -11)$ e s la retta affine descritta dalle equazioni $s = \{x + 1 = z = 0\}$.

(1) Costruisci una isometria affine $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r) \subset s$ senza punti fissi.
(2) Costruisci una isometria affine $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r) \subset s$ con punti fissi.

In entrambi i punti, descrivi prima f geometricamente a parole e poi calcola A e b.

Soluzioni

Esercizio 1. Calcolando il polinomio caratteristico si vede che gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = t, \quad \lambda_3 = 1 - t.$$

I tre autovalori sono distinti, tranne nei casi $t = 0, 1/2, 1$. Per $t = 0, 1/2$ si verifica che le molteplicità algebriche e geometriche di ciascun autovalore coincidono. Per $t = 1$ l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2 e geometrica 1. Quindi la matrice è diagonalizzabile per ogni $t \neq 1$.

Esercizio 2. La matrice S_2 è una matrice 2×2 con determinante -1 e quindi ha segnatura $(1, 1, 0)$. La matrice $S = S_4$ ha determinante 1, quindi le possibili segnature per S sono $(4, 0, 0)$, $(2, 2, 0)$ oppure $(0, 4, 0)$. Poiché S contiene S_2 come sottomatrice, si deve avere $i_+ \geqslant 1$ e $i_- \geqslant 1$ e quindi l'unica possibilità è $(2, 2, 0)$.

In generale, la matrice S_{2n} ha determinante $(-1)^n$ e segnatura $(n, n, 0)$. Si dimostra per induzione su n. Il caso $n = 1$ è già fatto, quindi supponiamo la tesi vera per $n - 1$ e la dimostriamo per n.

Uso Laplace per sviluppare lungo la prima colonna, e poi lungo la prima riga:

$$\det S_{2n} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det(S_{2(n-1)}) = -(-1)^{(n-1)} = (-1)^n.$$

Per quanto riguarda la segnatura, notiamo che S_{2n} contiene $S_{2(n-1)}$ come sottomatrice. La sottomatrice $S_{2(n-1)}$ per ipotesi induttiva ha segnatura $(n-1, n-1, 0)$. Quindi per S_{2n} otteniamo $i_+ \geqslant n-1$ e $i_- \geqslant n-1$. Poiché $\det S_{2n} = (-1)^n$, l'unica possibilità è che $i_- = n$ e quindi $i_+ = n$.

Esercizio 3. Facendo il disegno si vede che le due rette sono sghembe e parallele agli assi z e y, e hanno come perpendicolare comune la retta $\bar{r} = \{P + tv\}$ parallela all'asse x, con

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Una possibilità è una rototraslazione di asse $\bar{r}$, angolo $\pi/2$ e passo 2. Ci sono due soluzioni di questo tipo a seconda che si ruoti in un senso o nell'altro; in una si ottiene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(2) Una possibilità è una antirotazione di angolo $\pi/2$ di asse parallela all'asse $\bar{r}$, con centro nel punto medio $M = (0, 1, 0)$ del segmento che interseca in modo ortogonale le due rette. Anche qui ci sono due soluzioni di questo tipo a seconda del verso di rotazione; una di queste è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Per entrambe le domande c'erano anche altre possibili soluzioni.